Mehr-Ebenen-Modelle

Kai Arzheimer | Vorlesung Forschungsmethoden

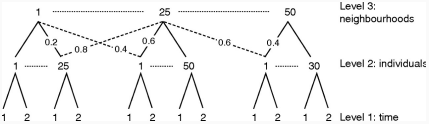
Übersicht

Einführung
- Strukturierte Daten
- Einfache Lösungen

Mehr-Ebenen-Modelle
- Konzepte und Begriffe
  - Random & Fixed
  - Typen von Modellen
- VPC/Intra-Class-Correlation

Software
- Programme
- Beispiel

Fazit



(Quelle: Kawachi/Subramanian 2007)

Einführung

Was sind strukturierte Daten?

- In der Realität fast immer mehrstufige Zufallsstichproben, z. B. ADM
  1. Auswahl Netz
  2. Auswahl Sampling-Point
  3. Auswahl Adresse/Haushalt
  4. Auswahl Befragungsperson
- Untersuchungsobjekte (Befragte) sind „nicht unabhängig“ voneinander

Was heißt „nicht unabhängig voneinander“?

- Objekte beeinflussen sich gegenseitig
- Sie werden in gleicher Weise beeinflußt von
  - gemessenen und nicht
  - gemessenen Eigenschaften ihres gemeinsamen Kontextes
- Annahme, daß ϵ aus identischen und voneinander unabhängigen Normalverteilungen gezogen, wird hinfällig

Gibt es noch andere Quellen für „Struktur“?

- Stichprobenziehung/Datenerhebung eine wichtige Quelle (Klumpenstichproben/Schulforschung)
- Selbst bei einfacher Zufallsstichprobe häufig Strukturierung der Daten durch „Kontexte“ (Anhänger verschiedener Parteien/Leser verschiedener Zeitungen) $\rightarrow$
- Kontexte müssen nicht räumlich definiert sein
- Kontexte sind überall: Wähler in Stimmbezirken in Wahlkreisen in Ländern …
- Paneldaten sind auch Kontextdaten (Person als Kontext)

Probleme: Standardfehler

- Standardannahme: i.i.d.
  - ϵ unabhängige Ziehungen aus Normalverteilung
  - mit konstanter Varianz
- Kontexte
  - Varianz nicht konstant
  - Ziehungen nicht unabhängig voneinander (Korrelation von ϵ)
- Heteroskedastizität + Autokorrelation $\rightarrow$ geschätzte Standardfehler zu optimistisch

Probleme: Schätzung von Kontexteffekten

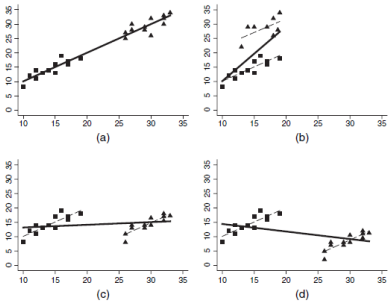


Fig. 1 The thick line in each panel is the estimated slope from the pooled regression. (a) Pooled regression correctly estimates slope; (b) pooled regression overestimates slope; (c) pooled regression underestimates slope; and (d) pooled regression estimates incorrect sign for slope.

1. Konstante Effekte (unit effects) $\rightarrow$ Verzerrungen möglich (Simpson's Paradox)

Probleme: Schätzung von Kontexteffekten

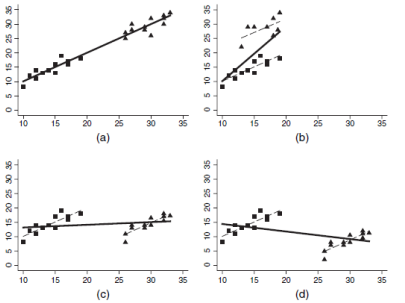


Fig. 1 The thick line in each panel is the estimated slope from the pooled regression. (a) Pooled regression correctly estimates slope; (b) pooled regression overestimates slope; (c) pooled regression underestimates slope; and (d) pooled regression estimates incorrect sign for slope.

1. Konstante Effekte (unit effects) $\rightarrow$ Verzerrungen möglich (Simpson's Paradox)

2. Effekte von Kontexteigenschaften (z. B. ALQ)
   - Als zusätzliche x-Variable betrachten?
   - Zahl der unabhängigen Messungen kleiner als Zahl der Fälle (Beispiele bei Moulton 1990))

Konventionelle Ansätze

1. Separate Analysen (Zahl der Kontexte klein, keine Kontextvariablen)
2. Unit-Effekte durch Konstante abbilden
   - Wenn Zahl der Kontexte klein
   - Problem: Kontextvariablen nicht mit einbeziehbar (Multikollinearität)
3. Interaktion Dummies/Individualvariablen
   - Wirkung von Individualvariablen variiert über Kontexte
   - Keine Effekte von Kontextvariablen möglich
4. *Robuste Standardfehler*: `, robust cluster()`)
   - Erfordern große (?) Fallzahlen
   - Robust gegen Heteroskedazität
   - Robust gegen Autokorrelation innerhalb von Kontexten
   - Mit 2 und 3 kombinierbar oder Kontextvariablen

Mehr-Ebenen-Modelle

Was sind Mehr-Ebenen-Modelle (im engeren Sinn)

- Mehr-Ebenen-Probleme seit den Gründervätern bekannt (z. B. Coleman)
- Im engeren Sinne: Erweiterung des klassischen Regressionsmodells für mehrere simultane Analyseebenen
- Dynamische Entwicklung in den Erziehungswissenschaften seit 1980er/90er Jahren (Computer)
- Verstärke Rezeption in der Politikwissenschaft seit Beginn der 2000er Jahre

Unter welchen Voraussetzungen ist Anwendung möglich/sinnvoll?

- Große Zahl von Kontexten (Mindestwert 30 bis 50, für Varianzkomponenten nach Möglichkeit mehr)
- Typischerweise 2 bis 100 Objekte pro Kontext (in Politikwissenschaft oft mehr)
- Kontexte sind als Zufallsstichprobe aus einer großen Grundgesamtheit von Kontexten zu interpretieren
- Der letzte Punkt wird häufig ignoriert bzw. ist strittig

Was sind die Grundannahmen des Modells?

- Variation von Achsenabschnitten/Steigungen über Kontexte …
- … kann durch Zufallsvariable(n) beschrieben werden
- Statt vieler separater Modellschätzungen Schätzung von Mittelwert und Varianz *der Modellparameter* („random effects“) $\rightarrow$ sehr effizient
- Korrekte Standardfehler, Kontexteffekte und Cross-Level-Interaktionen machbar
- Shrinkage Estimates

Wie sieht das Modell aus?

- Viele Varianten mit unterschiedlicher Komplexität
- Relativ einfach: „Random Intercept“

Wie sieht das Modell aus?

- Viele Varianten mit unterschiedlicher Komplexität
- Relativ einfach: „Random Intercept“

Beispiel

- Rechtsextremismus hängt von individuellen Eigenschaften ab
- das mittlere Niveau variiert aber über die Kreise (z. B. wegen politischer Traditionen)

Wie sieht das Modell aus?

- Viele Varianten mit unterschiedlicher Komplexität
- Relativ einfach: „Random Intercept“

Beispiel

- Rechtsextremismus hängt von individuellen Eigenschaften ab
- das mittlere Niveau variiert aber über die Kreise (z. B. wegen politischer Traditionen)

- Dummy variable model mit Konstante + 298 Dummies?
- Oder lieber so?

Wie sieht das random intercept model aus?

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} \tag{1}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + u_{0j} + e_{0ij} \tag{2}$$

mit

$$\left(u_{0j}\right) \sim (0, \boldsymbol{\Omega_u}) : \boldsymbol{\Omega_u} = \left(\sigma^2_{u0}\right) \tag{3}$$

$$\left(e_{0ij}\right) \sim (0, \boldsymbol{\Omega_e}) : \boldsymbol{\Omega_e} = \left(\sigma^2_{e0}\right) \tag{4}$$

Exkurs: Was bedeuten Random & Fixed?

- In der Methodenliteratur drei verschiedene Bedeutungen, die zusammenhängen, aber nicht identisch sind
  1. Random/Fixed Variables
  2. Random/Fixed Effects
  3. Random/Fixed Coefficients

Was sind Random/Fixed Variables?

- Fixed Variable:
  - Ohne Fehler gemessen
  - Gleiche Meßwerte, wenn Stichprobenziehung/Untersuchung wiederholt wird
- Random Variable:
  - Meßwerte Stichprobe aus Grundgesamtheit möglicher Werte
  - Würden in nächster Stichprobe etwas anders aussehen (z. B. wegen zufälligen Meßfehlern)

Was sind Random & Fixed Effects?

- Fixed effects: Beschränkung auf in einer Studie tatsächlich vorkommenden Werte der unabhängigen Variablen
- Random effects (größere Standardfehler): Werte als Stichprobe aus einem Universum von möglichen Werten
- Vor allem im Zusammenhang mit experimentellen Studien (ANOVA) diskutiert: Sind die Stimuli fixed oder random? (Beispiel: Medikamentendosen vs. Kunstwerke)

Was sind Random & Fixed Coefficients?

- Im Mehrebenenmodell geht man davon aus, daß die unabhängigen Variablen fixed sind
- Die Achsenabschnitte/Steigungen können aber auf der unteren Ebene variieren $\rightarrow$ random coefficients $\rightarrow$ Gruppen sind Stichprobe aus Grundgesamtheit von Gruppen (in denen jeweils unterschiedliche Zusammenhänge gelten)

Welche Grundtypen von ML-Modellen gibt es?

$$y_{ij} = \beta_0 + u_{0j} + e_{0ij} \tag{5}$$

- „Empty model“ oder „intercept-only“ model bezeichnet
- Relative Bedeutung von Kontext-/Individualeffekten kann bestimmt werden (mehr dazu gleich)
- Sehr nützlich als Ausgangspunkt für komplexere Modelle

Welche Grundtypen von ML-Modellen gibt es?

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + u_{0j} + e_{0ij} \tag{6}$$

- Empty model + Variablen auf der Individual- und gegebenenfalls Kontextebene (fixed coefficients) erweitert, erhält man ein „random intercept“ model
- „Normale“ Regression, aber zufällige, kontextspezifische Einflüsse, die Achsenabschnitt variieren lassen, Varianzkomponentenmodelle

Welche Grundtypen von ML-Modellen gibt es?

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_{1j} x_{1ij} + \ldots + u_{0j} + e_{0ij} \tag{7}$$

$$\beta_{1j} = \beta_1 + u_{1j} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

- Effekt von Individualvariablen variiert zufällig über die Gruppen/Kontexte: „random coefficient“ model
- Weitere Komplikationen möglich
  - Cross-Level-Interaktionen
  - Subgruppenspezfische Kontextvarianzen etc.
  - Sinn? Test von Koeffizienten/Varianzen per Wald-Test, Veränderung der Devianz, BIC

Wie war das mit den Varianzkomponenten?

$$\text{VPC} = \rho = \frac{\sigma^2_{u0}}{\sigma^2_{u0} + \sigma^2_{e0ij}} \tag{10}$$

- Empty model: Gesamtvarianz zufällig, Aufteilung auf die Ebenen der Struktur($u_{0j} + e_{0ij}$)
- Der Anteil der Kontextvarianz an der Gesamtvarianz
  - Variance Partition Coefficient (VPC)
  - Intra-Class-Correlation bezeichnet (ICC, ρ)
- ICC: mittlere Korrelation zwischen den Werten von y, die sich errechnet, wenn ich Paare aus derselben Gruppe betrachte
- Im Zwei-Ebenen-Modell fallen VPC und ρ zusammen, in Modellen mit mehr als zwei Ebenen können sie sich unterscheiden

Erweiterungsmöglichkeiten

- Nicht-metrische abhängige Variablen: binomiale, ordinale, multinomiale Logit/Probit Modelle
- Cross-Classification (Grund- und weiterführende Schulen)
- Interpretation von Längsschnittmodellen als ML-Modelle (Panel) mit Trends

Parameterschätzung

- Prinzipiell: Likelihood-Schätzung, aber keine geschlossene Form bekannt; alle Verfahren sind iterativ
- Traditionell: Linearisierung $\rightarrow$ Pseudo- und Quasilikelihood
  - Relativ schnell
  - Häufig brauchbare Approximation
- Numerische Integration
  - Präziser (bei vielen Integrationspunkten)
  - Selbst mit modernen Computern *sehr* langsam
- Simulation (MCMC)
  - Langsamer als Pseudo-/Quasilikelihood
  - Schneller als numerische Integration
  - Fehlerquellen
- Entwicklung nicht abgeschlossen

Software

Reine ML-Programme: MLwiN und HLM

+ Basieren auf alten Dos-Programmen → Vielzahl von teils sehr komplexen Modellen unterstützt
+ Relativ benutzerfreundliche Oberflächen, sehr gut dokumentiert
+ Approximation und Simulation
- Skripting nur beschränkt möglich
- Eigene Binär- und Ausgabeformate → Konversion notwendig

MPlus

+ Verschiedene Analyseebenen als ein (weiterer) Aspekt des allgemeinen „Muthen Model“
+ Skripting möglich
- Kryptische Dokumentation
- Eigenes Binär- und Ausgabeformat
+ MPlusAutomation in R

Stata (ab Version 10)

- \+ Vollständige Integration (Binärformat, Postestimation, Skripting etc.)
- +/- Nur numerische Approximation – exakt, aber sehr langsam
- \+ Inzwischen: Vielzahl von abhängigen Variablen
- Folien mit Beispielen (Syntax und Daten): `https://www.kai-arzheimer.com/kontext-mehr-ebenen-seminar-folien/unit-02.pdf`

“Pooling”

- Beispiel: Politisches Vertrauen in 27 ESS-Ländern (Easton, Sozialkapital)
- Separate Analysen:
  - 27 Konstanten, 27 Sets von Koeffizienten
  - Keinerlei “pooling” der Daten - ineffizient
- Eine gemeinsame Regressionsanalyse
  - 1 Konstante, 1 Set von Koeffizienten
  - Vollständiges “pooling” der Daten - bias, wenn sich Konstanten unterscheiden (Simpson’s Paradox)
- Gemeinsame Regressionsanalyse mit Länderdummies + cluster-robuste Standardfehler
- Statistische Mehr-Ebenen-Modellierung - flexibel und effizient

Multi-level: Empty Model

```
mixed poltrust  || cntry:  if sample, nolog

Mixed-effects ML regression                     Number of obs     =     49,780
Group variable: cntry                           Number of groups  =         27

Obs per group:
      min =        990
      avg =    1,843.7
      max =      2,933

Wald chi2(0)      =          .
Log likelihood = -105112.39                     Prob > chi2       =          .

------------------------------------------------------------------------------
     poltrust |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        _cons |   3.465337   .2184091    15.87   0.000     3.037263    3.893411
------------------------------------------------------------------------------


------------------------------------------------------------------------------
   Random-effects Parameters  |   Estimate   Std. Err.     [95% Conf. Interval]
-----------------------------+------------------------------------------------
cntry: Identity              |
  var(_cons) |   1.285686    .350563      .7534269     2.19396
-----------------------------+------------------------------------------------
        var(Residual) |   3.981859   .0252459      3.932684    4.031649
------------------------------------------------------------------------------
LR test vs. linear model: chibar2(01) = 13029.14      Prob >= chibar2 = 0.0000
est store empty
```

Modell mit Individualvariable + random intercept

```
mixed poltrust ppltrst, nolog || cntry:

Mixed-effects ML regression                     Number of obs     =     49,780
Group variable: cntry                           Number of groups  =         27

Obs per group:
      min =        990
      avg =    1,843.7
      max =      2,933

Wald chi2(1)      =    3722.74
Log likelihood = -103317.84                     Prob > chi2       =     0.0000

------------------------------------------------------------------------------
     poltrust |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ppltrst |   .2311844    .003789    61.01   0.000      .223758    .2386107
        _cons |   2.329236   .1858588    12.53   0.000     1.964959    2.693512
------------------------------------------------------------------------------


------------------------------------------------------------------------------
   Random-effects Parameters  |   Estimate   Std. Err.     [95% Conf. Interval]
-----------------------------+------------------------------------------------
cntry: Identity              |
  var(_cons) |   .9211896   .2513747      .5396009    1.572626
-----------------------------+------------------------------------------------
        var(Residual) |   3.705399   .0234931      3.659638    3.751732
------------------------------------------------------------------------------
LR test vs. linear model: chibar2(01) = 9480.09       Prob >= chibar2 = 0.0000
est store randomi
```

Modell mit Individualvariable, random intercept und Kontextvariable (corruption protection)

```
mixed poltrust ppltrst c_ticpi_2009, nolog || cntry:

Mixed-effects ML regression                     Number of obs     =     49,780
Group variable: cntry                           Number of groups  =         27

Obs per group:
      min =        990
      avg =    1,843.7
      max =      2,933

Wald chi2(2)      =    3793.57
Log likelihood = -103303.55                     Prob > chi2       =     0.0000

------------------------------------------------------------------------------
    poltrust |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     pplrtrst |    .231046   .0037889    60.98   0.000     .2236199    .2384721
c_ticpi_2009 |   .3776843    .053013     7.12   0.000     .2737806    .4815879
       _cons |  -.0467665   .3509429    -0.13   0.894     -.734602     .641069
------------------------------------------------------------------------------


------------------------------------------------------------------------------
  Random-effects Parameters  |   Estimate   Std. Err.     [95% Conf. Interval]
-----------------------------+------------------------------------------------
cntry: Identity              |
  var(_cons) |   .3184155   .0872196       .186138     .544695
-----------------------------+------------------------------------------------
       var(Residual) |   3.705398   .0234931      3.659637     3.75173
------------------------------------------------------------------------------
LR test vs. linear model: chibar2(01) = 4087.44       Prob >= chibar2 = 0.0000
est store randomikon
```

Modelle im Überblick

```
est tab cluster empty empty3 randomi randomikon

----------------------------------------------------------------
    Variable |  cluster       empty        randomi     randomikon
-------------+--------------------------------------------------
_            |
     ppltrst |  .33966617
       _cons |  1.7199469
-------------+--------------------------------------------------
poltrust     |
     ppltrst |                              .23118438    .23104601
c_ticpi_2009 |                                           .37768426
       _cons |               3.4653374     2.3292358    -.0467665
-------------+--------------------------------------------------
lns1_1_1     |
       _cons |               .12564621    -.04104472   -.57219903
-------------+--------------------------------------------------
lnsig_e      |
       _cons |               .69087439     .65489542    .65489528
-------------+--------------------------------------------------
```

Sparsamkeit und Fit

```
est stats cluster empty empty3 randomi randomikon

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

-----------------------------------------------------------------------------
       Model |        Obs  ll(null)  ll(model)      df         AIC        BIC
-------------+---------------------------------------------------------------
     cluster |     49,780   -111627  -108057.9       2    216119.8   216137.4
       empty |     49,780         .  -105112.4       3    210230.8   210257.2
     randomi |     49,780         .  -103317.8       4    206643.7   206678.9
  randomikon |     49,780         .  -103303.5       5    206617.1   206661.2
-----------------------------------------------------------------------------
       Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.
```

Fazit

Fazit

- Viele sozialwissenschaftliche Fragestellungen präsentieren sich als Mehr-Ebenen-Probleme
- Oder lassen sich als Mehr-Ebenen-Probleme verstehen
- Elegante und effiziente Modellierung
- Fallstricke