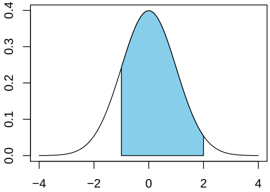
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Statistik I

Sommersemester 2009


0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

Zum Nachlesen

- Agresti/Finlay: Kapitel 4.1-4.3
- Rudas, Tamas: Probability Theory. A Primer. Thousand Oaks u. a.: 2004

Interaktion

- Standardmäßig additives Zusammenwirken
  - Arbeitslosigkeit hat Effekt auf Wahl des FN
  - Anteil Zuwanderer hat Effekt auf Wahl des FN
  - Beides *unabhängig* voneinander
- Interaktion: Effekte verstärken sich gegenseitig/schwächen sich gegenseitig
  - Wirkung von Arbeitslosigkeit +
  - Wirkung von Zuwanderung +
  - Wirkung von Arbeitslosigkeit × Zuwanderung (positiv oder negativ)
- Bildung einer Produktvariablen; Effekt schätzen wir für normale Variable

Daten

Département	Zuwanderer	Arbeitslosigkeit	Produktvariable
Ain	7.7	4.7	36.1
Aisne	2.5	8.5	21.5
Allier	2.9	6.8	19.4
...	...	...	...

- *Wenn* Arbeitslosigkeit und Zuwanderung additiv wirken
- Hat Produktvariable keinen Effekt (Koeffizient von 0)
- Darstellung am besten graphisch

Arbeitslosigkeit, Zuwanderung, FN-Wahl

Modell mit Interaktion

FN 2004 = -3.2 + 2.5 × Arbeitslosenquote + 1.7 × Zuwandererquote -0.2 × Arbeitslosenquote × Zuwandererquote

Arbeitslosigkeit, Zuwanderung, FN-Wahl

Modell mit Interaktion

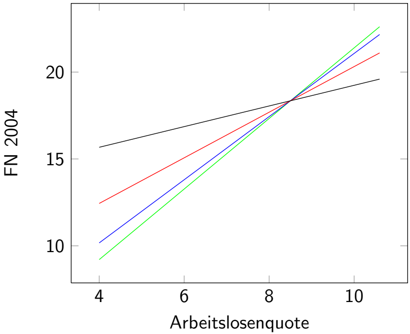
FN 2004 $=$ -3.2 $+$ 2.5 $\times$ Arbeitslosenquote $+$ 1.7 $\times$ Zuwandererquote -0.2 $\times$ Arbeitslosenquote $\times$ Zuwandererquote

- 2.5: Effekt der Arbeitslosenquote wenn Zuwandererquote $= 0$
- 1.7: Effekt der Zuwandererquote wenn Arbeitslosenquote $= 0$
- Für alle anderen Konstellationen: einsetzen und ausrechnen

Arbeitslosigkeit, Zuwanderung, FN-Wahl

Modell mit Interaktion

FN 2004 = -3.2 + 2.5 × Arbeitslosenquote + 1.7 × Zuwandererquote -0.2 × Arbeitslosenquote × Zuwandererquote



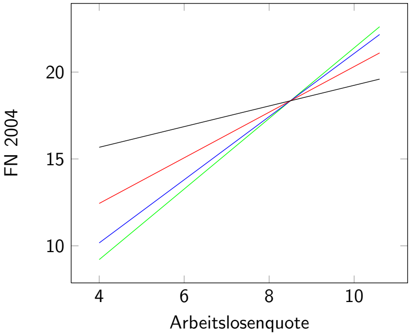
Zuwandererquoten: 2.6% (grün), 3.7%, 6.3%, 10% (schwarz); $R^2 = 0.25$

- Interpretation?
- Effekt der ALQ bei niedriger Zuwanderung am stärksten
- Effekt Zuwanderung stark und positiv bei niedriger ALQ

Arbeitslosigkeit, Zuwanderung, FN-Wahl

Modell mit Interaktion

FN 2004 = -3.2 + 2.5 × Arbeitslosenquote + 1.7 × Zuwandererquote -0.2 × Arbeitslosenquote × Zuwandererquote



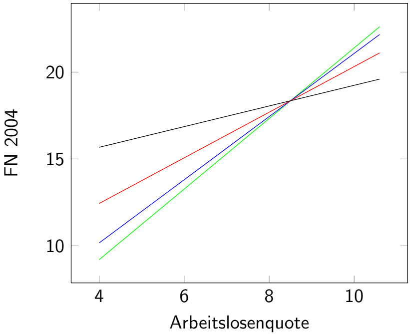
Zuwandererquoten: 2.6% (grün), 3.7%, 6.3%, 10% (schwarz); $R^2 = 0.25$

- Interpretation?
- Effekt der ALQ bei niedriger Zuwanderung am stärksten
- Effekt Zuwanderung stark und positiv bei niedriger ALQ
- Schwächt sich ab mit höherer ALQ

Arbeitslosigkeit, Zuwanderung, FN-Wahl

Modell mit Interaktion

FN 2004 = -3.2 + 2.5 × Arbeitslosenquote + 1.7 × Zuwandererquote -0.2 × Arbeitslosenquote × Zuwandererquote

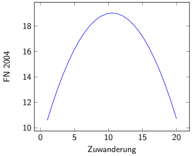


Zuwandererquoten: 2.6% (grün), 3.7%, 6.3%, 10% (schwarz); $R^2 = 0.25$

- Interpretation?
- Effekt der ALQ bei niedriger Zuwanderung am stärksten
- Effekt Zuwanderung stark und positiv bei niedriger ALQ
- Schwächt sich ab mit höherer ALQ
- *Negativ* bei ALQ > 8.5 (1.7/0.2)

Non-lineare Regression

- Linearer Zusammenhang nicht immer plausibel
  - Höhere Zuwandererquote verunsichert ethnische Franzosen → Anstieg FN
  - Höhere Zuwandererquote → mehr Zuwanderer, die nicht FN wählen
  - Effekt der Zuwanderung schwächer/negativ für höhere Niveaus von Zuwanderungsquote
- Modelliert durch zusätzlichen Effekt für quadrierte Zuwanderungsquote
- Negativer Koeffizient → nach unten offene Parabel



Was ist an unseren Modellen „parametrisch“?

- Alle bisher betrachteten Modelle haben einen oder mehrere Parameter
- D h. mehr oder minder einfache Funktionen mit einigen wenigen Zahlen (Koeffizienten)
- Sparsam und relativ flexibel
- Aber: Annahmen
  - Funktionale Form korrekt
  - Verteilungsannahmen

Was sind nicht-parametrische Verfahren?

- Keine Annahmen über Verteilung
- Keine vorgegebene funktionale Form
- Daten „sprechen“

Was sind nicht-parametrische Verfahren?

- Keine Annahmen über Verteilung
- Keine vorgegebene funktionale Form
- Daten „sprechen“ (Setzen relativ viele Datenpunkte voraus)

Was sind nicht-parametrische Verfahren?

- Keine Annahmen über Verteilung
- Keine vorgegebene funktionale Form
- Daten „sprechen“ (Setzen relativ viele Datenpunkte voraus)
- Vielzahl von unterschiedlichen Verfahren (nicht nur Regressionmodelle)
- Zwei Hauptgebiete
  - Verteilungsfreie Hypothesentests
  - Non-parametrische Regression $\longrightarrow$ Vielzahl von Verfahren

Was sind nicht-parametrische Verfahren?

- Keine Annahmen über Verteilung
- Keine vorgegebene funktionale Form
- Daten „sprechen“ (Setzen relativ viele Datenpunkte voraus)
- Vielzahl von unterschiedlichen Verfahren (nicht nur Regressionmodelle)
- Zwei Hauptgebiete
  - Verteilungsfreie Hypothesentests
  - Non-parametrische Regression → Vielzahl von Verfahren
- Ein wichtiges Verfahren: Lokale polynomiale Regression (= loess = scatter plot smoother)

Wie funktioniert die „polynomiale lokale Regression“

- Zwei Bestandteile

Wie funktioniert die „polynomiale lokale Regression“

- Zwei Bestandteile
  1. „Polynomial“: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + (\beta_2 x^2) \ldots$

Wie funktioniert die „polynomiale lokale Regression“

- Zwei Bestandteile
  1. „Polynomial“: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + (\beta_2 x^2) \dots$
  2. „Lokal“: eigene Regressionen für lokale Umgebungen $\rightarrow$ insgesamt sehr flexible Form

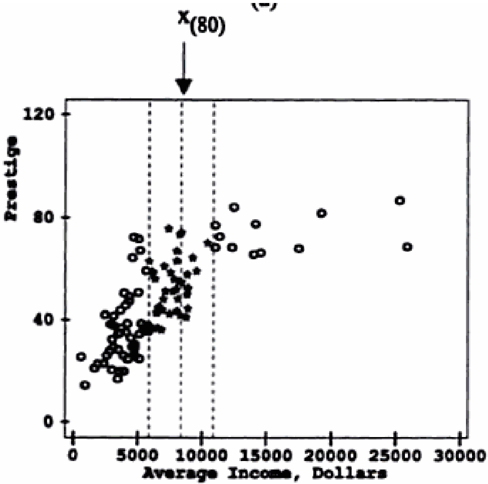
Wie funktioniert die „polynomiale lokale Regression“

- Zwei Bestandteile
  1. „Polynomial“: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + (\beta_2 x^2) \ldots$
  2. „Lokal“: eigene Regressionen für lokale Umgebungen $\longrightarrow$ insgesamt sehr flexible Form
- (Im wesentlichen) graphisches Verfahren, keine Parameter
- Erfordert sehr viel Rechenleistung

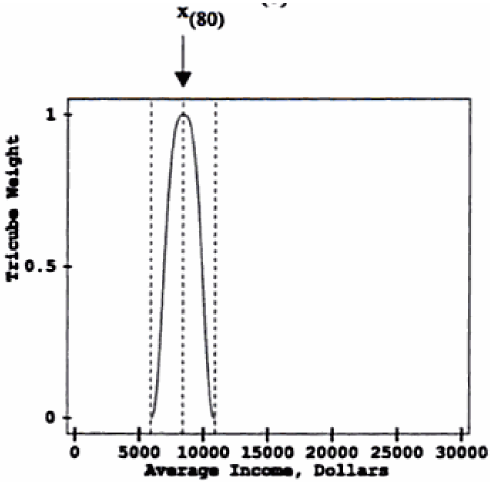
Vorgehensweise: FN 2004 und Zuwandererquote

- Datensatz nach x-Variable (Zuwandererquote) sortieren
- Anteil der Meßwerte („Fenster") festlegen, die in lokalen fit mit einbezogen werden (z. B. 40%)
- Festlegen von „fokalen" Werten für x, an denen lokale Regression berechnet wird (z. B. reale Werte von x)
- Festlegen einer Gewichtungsfunktion
  - Fokaler x-Wert mit maximalem Gewicht
  - Abfallendes Gewicht für andere Werte nach Distanz vom fokalen Wert
- Gewichtete Regression von y auf x, ggf. x^2, x^3 an jedem fokalen x-Wert
- Schätzwert für y
- Glatte Kurve verbindet (non-parametrische) erwartete Werte für y über den gesamten Wertebereich von x

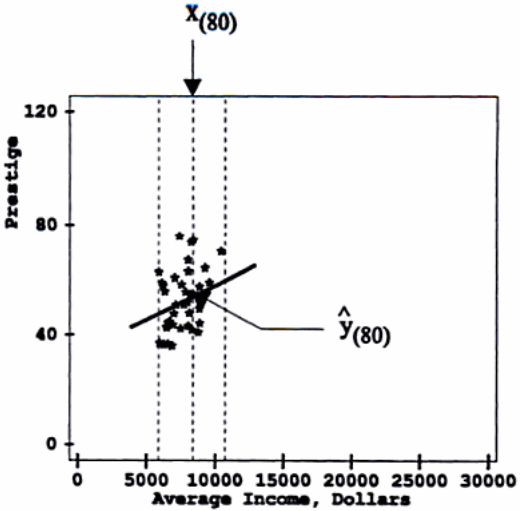
„Fenster“


$x_{(80)}$
120
80
40
0
Prestige
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
Average Income, Dollars

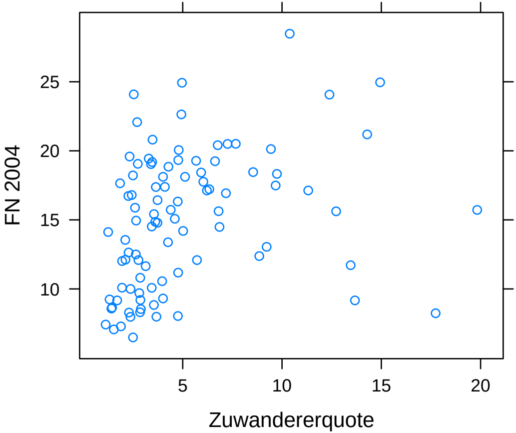
Gewichtungsfunktion



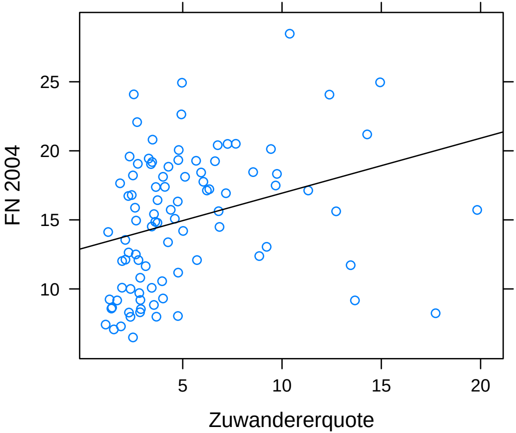
Lokale Regression



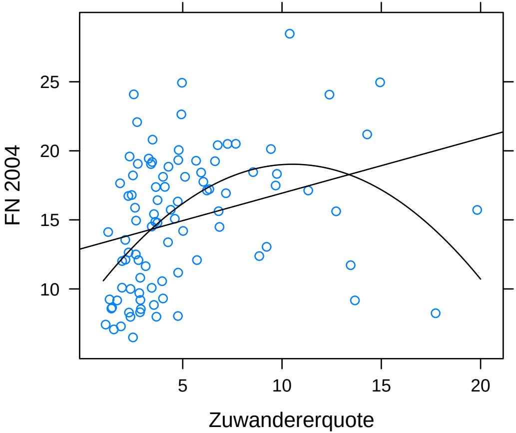
FN 2004 und Zuwanderer



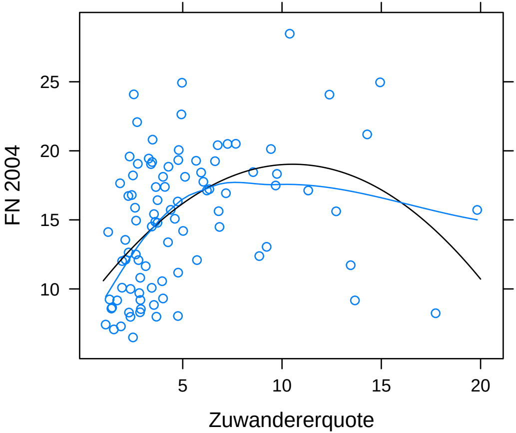
FN 2004 und Zuwanderer: lineare Regression



FN 2004 und Zuwanderer: nicht-lineare Regression



FN 2004 und Zuwanderer: non-parametrische Regression



Woher kommen Wahrscheinlichkeiten?

- Politikwissenschaftliche Theorien/Modelle nicht deterministisch
  - Inglehart: Früher Wohlstand $\rightarrow$ Postmaterialismus ...
  - Almond/Verba: Übereinstimmung Struktur/Kultur $\rightarrow$ Stabilität des Systems
  - Lipset/Rokkan: Staat-Kirche-Konflikt $\rightarrow$ Christliche/konservative Parteien

Woher kommen Wahrscheinlichkeiten?

- Politikwissenschaftliche Theorien/Modelle nicht deterministisch
  - Inglehart: Früher Wohlstand → Postmaterialismus ...
  - Almond/Verba: Übereinstimmung Struktur/Kultur → Stabilität des Systems
  - Lipset/Rokkan: Staat-Kirche-Konflikt → Christliche/konservative Parteien
- Theoretische Ansätze beschreiben eher eine *Tendenz*

Woher kommen Wahrscheinlichkeiten?

- Politikwissenschaftliche Theorien/Modelle nicht deterministisch
  - Inglehart: Früher Wohlstand → Postmaterialismus ...
  - Almond/Verba: Übereinstimmung Struktur/Kultur → Stabilität des Systems
  - Lipset/Rokkan: Staat-Kirche-Konflikt → Christliche/konservative Parteien
- Theoretische Ansätze beschreiben eher eine *Tendenz*
  - Häufiger postmaterialistisch
  - Stabiler als andere
  - *Wahrscheinlicher* als in anderen Systemen

Woher kommen Wahrscheinlichkeiten?

- Politikwissenschaftliche Theorien/Modelle nicht deterministisch
  - Inglehart: Früher Wohlstand → Postmaterialismus ...
  - Almond/Verba: Übereinstimmung Struktur/Kultur → Stabilität des Systems
  - Lipset/Rokkan: Staat-Kirche-Konflikt → Christliche/konservative Parteien
- Theoretische Ansätze beschreiben eher eine *Tendenz*
  - Häufiger postmaterialistisch
  - Stabiler als andere
  - *Wahrscheinlicher* als in anderen Systemen
- Regressionsmodelle: stochastische Komponente

Woher kommen Wahrscheinlichkeiten?

- Politikwissenschaftliche Theorien/Modelle nicht deterministisch
  - Inglehart: Früher Wohlstand → Postmaterialismus ...
  - Almond/Verba: Übereinstimmung Struktur/Kultur → Stabilität des Systems
  - Lipset/Rokkan: Staat-Kirche-Konflikt → Christliche/konservative Parteien
- Theoretische Ansätze beschreiben eher eine *Tendenz*
  - Häufiger postmaterialistisch
  - Stabiler als andere
  - *Wahrscheinlicher* als in anderen Systemen
- Regressionsmodelle: stochastische Komponente
  - Nichtgemessene Einflüsse
  - Als *zufällig* betrachtet

Woher kommen Wahrscheinlichkeiten?

- Politikwissenschaftliche Theorien/Modelle nicht deterministisch
  - Inglehart: Früher Wohlstand → Postmaterialismus …
  - Almond/Verba: Übereinstimmung Struktur/Kultur → Stabilität des Systems
  - Lipset/Rokkan: Staat-Kirche-Konflikt → Christliche/konservative Parteien
- Theoretische Ansätze beschreiben eher eine *Tendenz*
  - Häufiger postmaterialistisch
  - Stabiler als andere
  - *Wahrscheinlicher* als in anderen Systemen
- Regressionsmodelle: stochastische Komponente
  - Nichtgemessene Einflüsse
  - Als *zufällig* betrachtet
- Zufallsstichproben

Was ist der „frequentistische“ Wahrscheinlichkeitsbegriff?

- Zufallsexperiment
  - Ergebnis hängt vom Zufall ab (z. B. Befragung)
  - Beliebig oft wiederholbar; jeweils neues zufälliges Ergebnis
- Häufigkeit Ergebnis (z. B. CDU-Wähler) / Zahl der Wiederholung = relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit: Grenzwert der relativen Häufigkeit wenn Zahl der Wiederholungen $\rightarrow \infty$
- Grundlage der inferenzstatistischen Standardverfahren

Was ist der „frequentistische“ Wahrscheinlichkeitsbegriff?

- Zufallsexperiment
  - Ergebnis hängt vom Zufall ab (z. B. Befragung)
  - Beliebig oft wiederholbar; jeweils neues zufälliges Ergebnis
- Häufigkeit Ergebnis (z. B. CDU-Wähler) / Zahl der Wiederholung = relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit: Grenzwert der relativen Häufigkeit wenn Zahl der Wiederholungen $\rightarrow \infty$
- Grundlage der inferenzstatistischen Standardverfahren
- Scheinbar einfach und anschaulich

Was ist der „frequentistische" Wahrscheinlichkeitsbegriff?

- Zufallsexperiment
  - Ergebnis hängt vom Zufall ab (z. B. Befragung)
  - Beliebig oft wiederholbar; jeweils neues zufälliges Ergebnis
- Häufigkeit Ergebnis (z. B. CDU-Wähler) / Zahl der Wiederholung = relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit: Grenzwert der relativen Häufigkeit wenn Zahl der Wiederholungen $\rightarrow \infty$
- Grundlage der inferenzstatistischen Standardverfahren
- Scheinbar einfach und anschaulich
- *Modell* für wissenschaftliche Untersuchungen/soziale Prozesse
- Probleme: Wiederholbarkeit und Stabilität der Wahrscheinlichkeit

Welche Alternativen gibt es?

Thomas Bayes,
1702-1761

- Frequentistische Wahrscheinlichkeit: objektiv
- Keine Wiederholbarkeit (z. B. Klausur): subjektive Wahrscheinlichkeit
- Alternative statistische Rahmentheorie → Bayesianische Statistik

Welche Alternativen gibt es?

Thomas Bayes,
1702-1761

- Frequentistische Wahrscheinlichkeit: objektiv
- Keine Wiederholbarkeit (z. B. Klausur): subjektive Wahrscheinlichkeit
- Alternative statistische Rahmentheorie → Bayesianische Statistik
- Seit ca. 25 Jahren praktisch anwendbar

Welche Alternativen gibt es?

Thomas Bayes, 1702-1761

- Frequentistische Wahrscheinlichkeit: objektiv
- Keine Wiederholbarkeit (z. B. Klausur): subjektive Wahrscheinlichkeit
- Alternative statistische Rahmentheorie → Bayesianische Statistik
- Seit ca. 25 Jahren praktisch anwendbar
- Steigende Bedeutung für die Politikwissenschaft seit ca. 10 Jahren

Ereignisse

- Ergebnis eines Zufallsexperimentes: *Ereignis*
  - Elementareignis (outcome)
  - Ereignis als Kombination von Elementareignissen (event)
- Ereignisse werden oft von Großbuchstaben symbolisiert
- Alle möglichen Ergebnisse (Elementareignisse) eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω

Ereignisse

- Ergebnis eines Zufallsexperimentes: *Ereignis*
  - Elementareignis (outcome)
  - Ereignis als Kombination von Elementareignissen (event)
- Ereignisse werden oft von Großbuchstaben symbolisiert
- Alle möglichen Ergebnisse (Elementareignisse) eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω
- Z. B. Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}$

Ereignisse

- Ergebnis eines Zufallsexperimentes: *Ereignis*
  - Elementareignis (outcome)
  - Ereignis als Kombination von Elementareignissen (event)
- Ereignisse werden oft von Großbuchstaben symbolisiert
- Alle möglichen Ergebnisse (Elementareignisse) eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω
- Z. B. Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}$
- Oder Würfel-Wurf: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignisse

- Ergebnis eines Zufallsexperimentes: *Ereignis*
  - Elementareignis (outcome)
  - Ereignis als Kombination von Elementareignissen (event)
- Ereignisse werden oft von Großbuchstaben symbolisiert
- Alle möglichen Ergebnisse (Elementareignisse) eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω
- Z. B. Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}$
- Oder Würfel-Wurf: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Abzählbare vs. über-abzählbare Ergebnismengen: Würfel vs. exaktes Lebensalter

Ereignisse

- Ergebnis eines Zufallsexperimentes: *Ereignis*
  - Elementareignis (outcome)
  - Ereignis als Kombination von Elementareignissen (event)
- Ereignisse werden oft von Großbuchstaben symbolisiert
- Alle möglichen Ergebnisse (Elementareignisse) eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω
- Z. B. Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}$
- Oder Würfel-Wurf: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Abzählbare vs. über-abzählbare Ergebnismengen: Würfel vs. exaktes Lebensalter
- Komplexe Experimente/Ereignisse, z. B. Zahl/Anteil Unionswähler

Ereignisse

- Ergebnis eines Zufallsexperimentes: *Ereignis*
  - Elementareignis (outcome)
  - Ereignis als Kombination von Elementareignissen (event)
- Ereignisse werden oft von Großbuchstaben symbolisiert
- Alle möglichen Ergebnisse (Elementareignisse) eines Zufallsexperimentes bilden die Ergebnismenge Ω
- Z. B. Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}$
- Oder Würfel-Wurf: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Abzählbare vs. über-abzählbare Ergebnismengen: Würfel vs. exaktes Lebensalter
- Komplexe Experimente/Ereignisse, z. B. Zahl/Anteil Unionswähler
- Abzählbaren Elementarereignissen (und ihren Kombinationen) sind Wahrscheinlichkeiten zugeordnet (relative Häufigkeit)

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)
- Ein *unmögliches* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 0

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)
- Ein *unmögliches* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 0
- Ein *sicheres* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 1

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)
- Ein *unmögliches* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 0
- Ein *sicheres* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 1
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse für ein Zufallsexperiment ist 1

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)
- Ein *unmögliches* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 0
- Ein *sicheres* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 1
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse für ein Zufallsexperiment ist 1
- Allgemeiner: Die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung einer Reihe von wechselseitig ausgeschlossenen (disjunkten) Elementarereignissen ist gleich der Summe ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)
- Ein *unmögliches* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 0
- Ein *sicheres* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 1
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse für ein Zufallsexperiment ist 1
- Allgemeiner: Die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung einer Reihe von wechselseitig ausgeschlossenen (disjunkten) Elementarereignissen ist gleich der Summe ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten
- Das Komplement eines Ereignisses A^C ist die Menge aller Ereignisse, in denen A *nicht* eintritt

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von Ereignis $K = P(K)$ z. B. $P(K) = 0.5$ (faire Münze)
- Ein *unmögliches* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 0
- Ein *sicheres* Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit von 1
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse für ein Zufallsexperiment ist 1
- Allgemeiner: Die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung einer Reihe von wechselseitig ausgeschlossenen (disjunkten) Elementarereignissen ist gleich der Summe ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten
- Das Komplement eines Ereignisses A^C ist die Menge aller Ereignisse, in denen A *nicht* eintritt
- Die Wahrscheinlichkeit von $A^C = P(A^C) = 1 - P(A)$

Beispiel: Europawahl

- Befragung einer zufällig ausgewählten Wählerin als Zufallsexperiment
  - Drei Elementarereignisse: Union (U), SPD (S), Andere (A)
  - Wahrscheinlichkeiten: $P(U) = 0.3; P(S) = 0.2; P(A) = 0.5$
- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus (disjunkt)

Beispiel: Europawahl

- Befragung einer zufällig ausgewählten Wählerin als Zufallsexperiment
  - Drei Elementarereignisse: Union (U), SPD (S), Andere (A)
  - Wahrscheinlichkeiten: $P(U) = 0.3; P(S) = 0.2; P(A) = 0.5$
- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus (disjunkt)
- „Schnittmenge“ zwischen U und S (gemeinsames Auftreten) leer: $U \cap S = \{\}$

Beispiel: Europawahl

- Befragung einer zufällig ausgewählten Wählerin als Zufallsexperiment
  - Drei Elementarereignisse: Union (U), SPD (S), Andere (A)
  - Wahrscheinlichkeiten: $P(U) = 0.3; P(S) = 0.2; P(A) = 0.5$
- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus (disjunkt)
- „Schnittmenge" zwischen U und S (gemeinsames Auftreten) leer: $U \cap S = \{\}$
- $P(US) = 0$ (gemeinsames Auftreten)

Beispiel: Europawahl

- Befragung einer zufällig ausgewählten Wählerin als Zufallsexperiment
  - Drei Elementarereignisse: Union (U), SPD (S), Andere (A)
  - Wahrscheinlichkeiten: $P(U) = 0.3; P(S) = 0.2; P(A) = 0.5$
- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus (disjunkt)
- „Schnittmenge" zwischen U und S (gemeinsames Auftreten) leer: $U \cap S = \{\}$
- $P(US) = 0$ (gemeinsames Auftreten)
- „Vereinigungsmenge": U oder S oder beides (hier nicht möglich) $U \cup S = \{U, S\}$

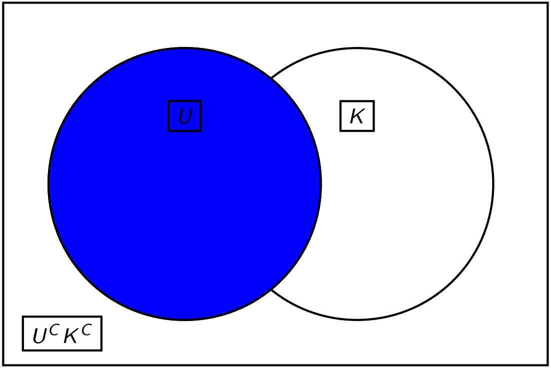
Beispiel: Europawahl

- Befragung einer zufällig ausgewählten Wählerin als Zufallsexperiment
  - Drei Elementarereignisse: Union (U), SPD (S), Andere (A)
  - Wahrscheinlichkeiten: $P(U) = 0.3; P(S) = 0.2; P(A) = 0.5$
- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus (disjunkt)
- „Schnittmenge“ zwischen U und S (gemeinsames Auftreten) leer: $U \cap S = \{\}$
- $P(US) = 0$ (gemeinsames Auftreten)
- „Vereinigungsmenge“: U oder S oder beides (hier nicht möglich) $U \cup S = \{U, S\}$
- Wahrscheinlichkeit für U oder S: $P(U \cup S) = P(U + S) = P(U) + P(S) = 0.3 + 0.2$

Allgemeiner: „Summe“ und „Produkt“ von Ereignissen

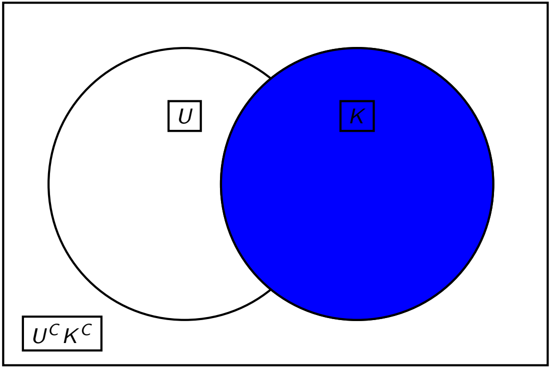
- Nicht-disjunkte Elementarereignisse: Wahlverhalten wie vorher und Konfession katholisch/nicht katholisch (K, K^C)
- $P(K) = 0.4; P(K^C) = 0.6$
- Kombination von Elementarereignissen
- „Summe“ $(U + K)$:
  - *Mindestens eines* von zwei oder mehr Ereignissen tritt ein
  - Entspricht Vereinigungsmenge
- „Produkt“ (UK)
  - *Zwei (bzw. alle)* Elementarereignisse treten ein
  - Entspricht Schnittmenge

Elementarereignisse



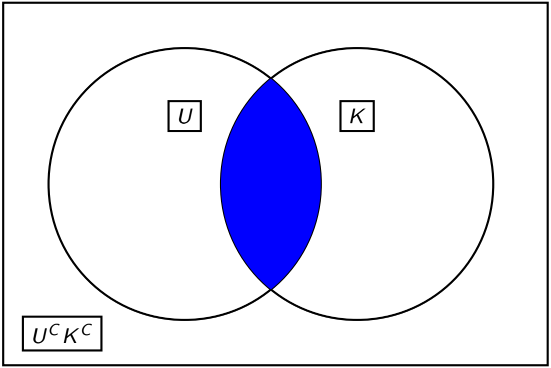
Alle Unionswähler

Elementarereignisse



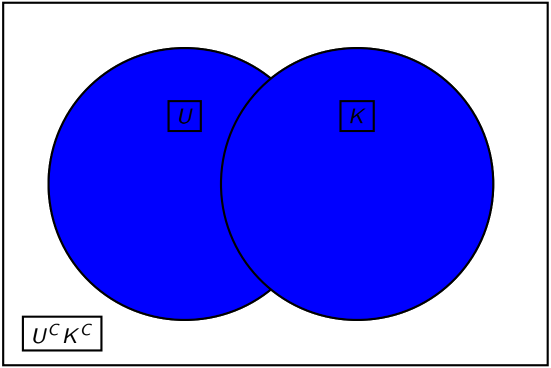
Alle Katholiken

Schnittmenge



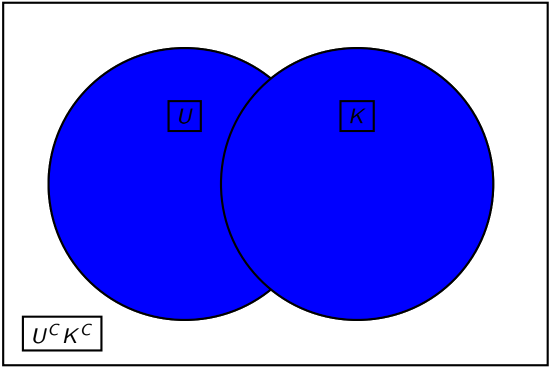
UK: Unionswähler und katholisch

Vereinigungsmenge



$U + K$: Alle Unionswähler + alle Katholiken - Schnittmenge (würde sonst zweimal gezählt)

Vereinigungsmenge



$= UK^C + U^C K + UK$

Wahrscheinlichkeit: Auftreten von *zwei* Ereignissen

- Disjunkt
  - Keine Schnittmenge
  - Wahrscheinlichkeit 1 + Wahrscheinlichkeit 2
  - Z. B. $P(U+S) = P(U) + P(S) = 0.3 + 0.2$
- Nicht disjunkt
  - Schnittmenge = Wahrscheinlichkeit für gemeinsames Auftreten
  - Wahrscheinlichkeit 1 + Wahrscheinlichkeit 2
    - Wahrscheinlichkeit für *gemeinsames* Auftreten
    (muß bekannt sein)

Implikation

- Ein Elementarereignis ist *sicher*, wenn ein anderes beobachtet wurde
- Z. B. Elementarereignis Unionsbürger ($P(B) = 0.9$; $P(B^C) = 0.1$)
- Wenn *irgendeine* Wahlentscheidung beobachtet wurde, muß B vorliegen
- Wahlentscheidung „SPD" impliziert Unionsbürgerschaft: $S \subseteq B$
- Gegenteil der ausschließenden Disjunktion
- Implikation und Disjunktion Extrembeispiele für *konditionale* Wahrscheinlichkeit

Drei Typen von Wahrscheinlichkeiten

1. Marginale Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit insgesamt
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen Katholiken auszuwählen: 0.4

Drei Typen von Wahrscheinlichkeiten

1. Marginale Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit insgesamt
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen Katholiken auszuwählen: 0.4
2. Gemeinsame Wahrscheinlichkeit
   - Schnittmenge
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen katholischen Unions-Wähler auszuwählen: 0.24 (fiktiv)

Drei Typen von Wahrscheinlichkeiten

1. Marginale Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit insgesamt
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen Katholiken auszuwählen: 0.4
2. Gemeinsame Wahrscheinlichkeit
   - Schnittmenge
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen katholischen Unions-Wähler auszuwählen: 0.24 (fiktiv)
3. Konditionale Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis (z. B. K)
   - Wenn ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist (z. B. U)
   - Symbolisch: $P(K|U)$

Drei Typen von Wahrscheinlichkeiten

1. Marginale Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit insgesamt
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen Katholiken auszuwählen: 0.4
2. Gemeinsame Wahrscheinlichkeit
   - Schnittmenge
   - Z. B. Wahrscheinlichkeit, einen katholischen Unions-Wähler auszuwählen: 0.24 (fiktiv)
3. Konditionale Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis (z. B. K)
   - Wenn ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist (z. B. U)
   - Symbolisch: $P(K|U)$

- Alle drei Wahrscheinlichkeiten hängen eng zusammen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeit → konditionale Wahrscheinlichkeit

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Unions-Wähler katholisch ist?
- Wie groß ist der Anteil katholischen Unions-Wähler (Schnittmenge) an allen Unionswählern?
- D. h.: $\frac{\text{gemeinsame Wahrscheinlichkeit} \quad (UK)}{\text{Wahrscheinlichkeit Union} \quad (U)}$
- Bzw. $P(K|U) = \frac{P(UK)}{U} = \frac{0.24}{0.3} = 0.8$
- Umgekehrt: marginale und konditionale Wahrscheinlichkeit → gemeinsame Wahrscheinlichkeit (Multiplikation)

Unabhängigkeit und Indifferenztabelle

- Wenn A von B unabhängig ist und umgekehrt
- Ist $P(A|B) = P(A)$ (konditionale = marginale Wahrscheinlichkeit)
- Und $P(B|A) = P(B)$
- Wahrscheinlichkeit für $= P(AB)$?

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A|B) \times P(B) = P(AB)$$

$$P(A) \times P(B) = P(AB)$$

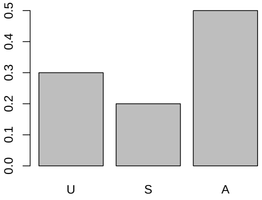
- Konstruktion der Indifferenztabelle: marginaleWahrscheinlichkeiten multiplizieren

Was ist eine Zufallsverteilung?

- Zufallsvariable (z. B. Wahlentscheidung) hat eine *Verteilung*
- Verteilung: gesamte Wahrscheinlichkeit (=1) verteilt sich auf Ereignisse

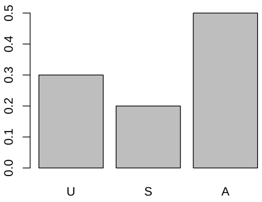
Was ist eine Zufallsverteilung?

- Zufallsvariable (z. B. Wahlentscheidung) hat eine *Verteilung*
- Verteilung: gesamte Wahrscheinlichkeit (=1) verteilt sich auf Ereignisse



Was ist eine Zufallsverteilung?

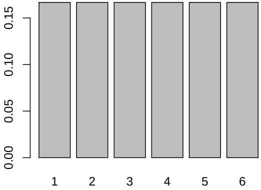
- Zufallsvariable (z. B. Wahlentscheidung) hat eine *Verteilung*
- Verteilung: gesamte Wahrscheinlichkeit (=1) verteilt sich auf Ereignisse
- Analog zu Verteilungen mit relativen Häufigkeiten



- Faßt Ereignisse/Wahrscheinlichkeiten des Zufallsexperimentes kompakt zusammen
- Kann häufig durch Formel beschrieben/approximiert werden

Wichtige diskrete Verteilungen

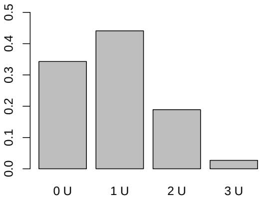
- Gleichverteilung:
  Alle Ereignisse gleich wahrscheinlich (z. B. Würfel)
- Binomialverteilung:
  komplexe Experimente
- Wie wahrscheinlich ist es, hintereinander drei Unionswähler zu befragen?



- Multinomialverteilung: Generalisierung der Binomialverteilung
- Balken (Wahrscheinlichkeiten) addieren sich stets zu eins

Wichtige diskrete Verteilungen

- Gleichverteilung:
  Alle Ereignisse gleich wahrscheinlich (z. B. Würfel)
- Binomialverteilung:
  komplexe Experimente
- Wie wahrscheinlich ist es, hintereinander drei Unionswähler zu befragen?

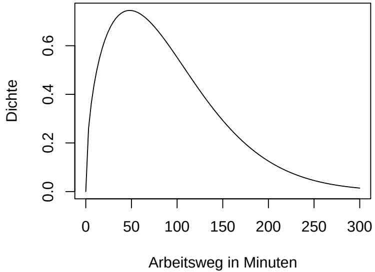


- Multinomialverteilung: Generalisierung der Binomialverteilung
- Balken (Wahrscheinlichkeiten) addieren sich stets zu eins

Warum kontinuierliche Verteilungen?

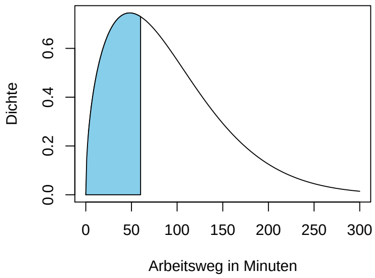
- Wahrscheinlichkeit $\approx$ relative Häufigkeit eines Ereignisses
- Ok für abzählbare Ereignisse (diskrete Zufallsvariablen)
- Was tun mit kontinuierlichen Zufallsvariablen?
- Histogramm $\rightarrow$ Dichteschätzung
- Fläche unter Dichtefunktion $= 1$ (Gesamtwahrscheinlichkeit)
- Wahrscheinlichkeit für Wert aus einem bestimmten Bereich $=$ Fläche über diesem Intervall

Dauer: Fahrt zur Arbeit



- Wieviel % der Bürger brauchen weniger 60 Minuten oder weniger für den Weg zur Arbeit?
- Fläche links von 60?

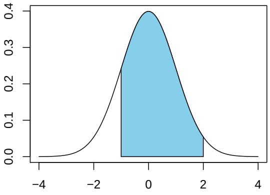
Dauer: Fahrt zur Arbeit



- Wieviel % der Bürger brauchen weniger 60 Minuten oder weniger für den Weg zur Arbeit?
- Fläche links von 60? → 37%

Normalverteilung

- Bekannteste und wichtigste aller kontinuierlichen Zufallsverteilungen
- Wahrscheinlichkeitsdichte für Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$
- Fläche unter der Kurve $=1$
- Über dem Intervall [-1;2] liegen rund 82% der Fläche
- D. h. in $\approx$ 4 von 5 Fällen zieht man einen Wert aus diesem Intervall



Zusammenfassung

- Wahrscheinlichkeit $\approx$ relative Häufigkeit bei häufiger Wiederholung
- Einfache Regeln/Eigenschaften
- Wahrscheinlichkeiten wichtig für Sozialwissenschaftler: Verhalten, Stichprobenziehung