Grundzüge der Ereignisdatenanalyse

Regressionsmodelle

Sommersemester 2009

Übersicht

Wie war das mit der SPD?

- „Versuchen Sie, in zwei bis drei Sätzen zu erklären, warum die SPD bei den nicht-parteigebundenen Ostdeutschen 1994 relativ gut abgeschnitten hat. Gehen Sie dabei auf den Median und die Quartile ein."
- Die Wahlwahrscheinlichkeiten von CDU und PDS werden sehr stark von der Bewertung des Sozialismus beeinflußt: Die CDU ist im unteren Quartil die stärkste, im oberen Quartil aber die schwächste Partei, bei der PDS ist das Bild fast spiegelbildlich.
- Dagegen hat die SPD den Vorteil, daß ihre Kurve flach verläuft.
- Sie ist in den beiden mittleren Quartilen und an den Rändern der äußeren Quartile erfolgreich, was sie insgesamt zur dominierenden Partei macht.

Was sind Ereignisdaten?

- Alternative Begriffe: Failure-/Survival- etc. Analyse
- Einfacher Fall: Zeitdauer bis Ereignis eintritt
- Komplexer Fall: Zeit, die Objekt in einem von mehreren (evtl. reversiblen) Zuständen zubringt
- Politikwissenschaftliche Beispiele
  - Lebensdauer einer Regierung
  - Beginn/Dauer von Krieg und Frieden
  - Karrieren von Mandatsträgern
- Alternative Analysemodelle: Panelanalyse, Logit-Analyse, ...

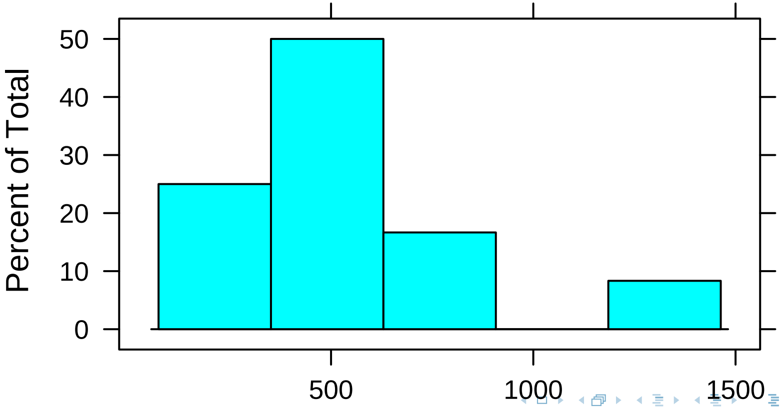
Terminologie

- Stammt aus der Medizin bzw. Ingenieurwissenschaften
- „Ereignis“ = Tod eines Patienten, Versagen einer Maschine
- Verwirrend = „Risiko“ für das Ende eines Krieges, „Versagen“ = Ende einer Kandidatur = Einzug ins Parlament ...
- Relevante Variable = Zeitdauer bis zum Eintritt eines Ereignisses

Ein Beispiel: Kabinette in Italien

Beginn	Ende	Dauer	PM	Ausrichtung
28/06/92	28/04/93	304	Giuliano Amato	links
28/04/93	10/05/94	377	Carlo Azeglio Ciampi	links
10/05/94	17/01/95	252	Silvio Berlusconi	rechts
17/01/95	17/05/96	486	Lamberto Dini	links
18/05/96	21/10/98	886	Romano Prodi	links
21/10/98	22/12/99	427	Massimo D'Alema	links
22/12/99	25/04/00	125	Massimo D'Alema (2. Amtszeit)	links
25/04/00	11/06/01	412	Giuliano Amato (2. Amtszeit)	links
11/06/01	23/04/05	1412	Silvio Berlusconi (2. Amtszeit)	rechts
23/04/05	17/05/06	389	Silvio Berlusconi (3. Amtszeit)	rechts
01/05/06	08/05/08	738	Romano Prodi (2. Amtszeit)	links
08/05/08	?	(385)	Silvio Berlusconi	rechts

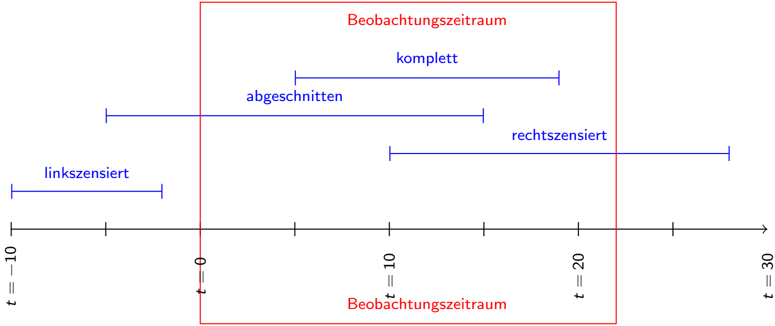
Ein Beispiel: Kabinette in Italien



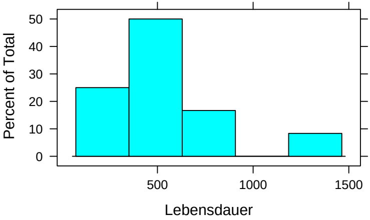
Warum besondere Modelle?

- Kovariaten nicht notwendigerweise über Zeit stabil
- Keine Werte $y < 0$
- Beobachtungen möglicherweise bimodal, „rechtszensiert“, „linkszensiert“, „abgeschnitten“ (truncated)
- Hochgradige Abweichung von Normalverteilung für ϵ
- Abweichungen sind *informativ*

Abgeschnitten, linkszensiert, rechtszensiert?



Was ist die abhängige Variable?



- T: Zufallsvariable (Dauer bis zum Eintritt des Ereignis); t: Zeitpunkt, Realisation von T
- t beginnt mit dem Beginn der Beobachtung
- Falls keine truncation/left-censoring mit Beginn der Exposition identisch
- Beschreibung durch (theoretische) Verteilungen/Funktionen

Was sind die wichtigen Funktionen/Verteilungen?

1. Dichtefunktion von T: $f(t)$
2. Kumulative Verteilungsfunktion: $F(t) = \Pr(T \leqslant t)$
3. Survivor-Funktion: $S(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t)$
4. Hazard-Funktion $h(t)$
5. (Kumulative Hazard-Funktion: $H(t) = \int_0^t h(u)\, du = -\ln(S(t)))$

Verhältnis zueinander?

- Alle vier/fünf Funktionen sind äquivalent
- Verschiedene Parametrisierungen

Was ist eine Dichtefunktion (-schätzung)?

- Histogramm
  - Absolute oder
  - relative Häufigkeiten
  - Summe der Flächen (Säulen) $= 1$
- Problem: Sprünge
- (Potentiell) unendlich viele Fälle $+$ kontinuierliche Werten $\rightarrow$ stetige Verteilung

Was ist eine Dichtefunktion (-schätzung)?

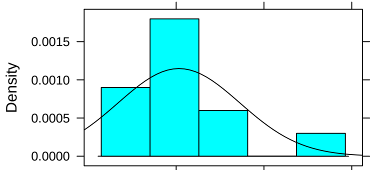
- Histogramm
  - Absolute oder
  - relative Häufigkeiten
  - Summe der Flächen (Säulen) $= 1$
- Problem: Sprünge
- (Potentiell) unendlich viele Fälle + kontinuierliche Werten $\rightarrow$ stetige Verteilung
- $=$ Dichte; Fläche unter Kurve $= 1 = 100\%$
- Entspricht Histogramm mit unendlich schmalen Streifen

Was sagt uns die Dichtefunktion?

- Alle Objekte starten gleichzeitig
- Wie wahrscheinlich ist eine bestimmte Überlebenszeit
- Bzw. instantane Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (Regierungsende) zu einer bestimmten Zeit
- Unkonditional
- Dichteschätzung über Überlebenszeiten

Was sagt uns die Dichtefunktion?

- Alle Objekte starten gleichzeitig
- Wie wahrscheinlich ist eine bestimmte Überlebenszeit
- Bzw. instantane Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (Regierungsende) zu einer bestimmten Zeit
- Unkonditional
- Dichteschätzung über Überlebenszeiten



Was sagt uns die kumulative Verteilungsfunktion?

- Definitives Integral über Dichtefunktion
- Wieviele Objekte sind zu einem bestimmten Zeitpunkt bereits „gestorben"?
- Bzw. wie hoch ist die kumulative Wahrscheinlichkeit des Versagens?

Kumulative Verteilungsfunktion

$$F(t) = \Pr(T \leqslant t) = \int_0^t f(t)\,dt$$

Was sagt uns die Survivor-Funktion?

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bis zu einem bestimmten Zeitpunkt „zu überleben“
- Bzw. äquivalent wieviele der ursprünglichen Objekte sind zu einem bestimmten Zeitpunkt „noch am Leben“ (im Ausgangszustand

Survivor-Funktion

$$S(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t) = 1 - \int_0^t f(t)\, dt$$

Was sagt uns die Hazard-Funktion?

- „Intensity“, „age-specific failure rate“, aktuelles Risiko: (instantane) *Rate* des Versagens (z. B. Kabinettsauflösung, wenn Objekt bis dahin durchgehalten hat)
  - Diskrete Zeit: bezogen auf Zeitraum
  - Kontinuierliche Zeit: Grenzwert für Länge des Zeitraums $\rightarrow 0$
- Konditionale Variante der Dichtefunktion

Hazard-Funktion

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t + \Delta t > T > t | T > t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{f(t)}{S(t)}$$

Wie war das mit dem Grenzwert?

- Z. B. Dichtefunktion:
  - Im Intervall $[t = 10; t = 20]$ endet Prozentsatz (kumulative Verteilungsfunktion) $\rightarrow$ Risiko des Scheiterns in diesem Intervall
  - Wieviel scheitern exakt bei $t = 10$?
  - Intervall immer schmaler machen $[10;\ 11] \rightarrow [10; 10 + 10^{-10}]$ $\rightarrow [10; 10 + 10^{-100}]$
  - Breite des Intervalls $\rightarrow 0$; Prozentsatz $\rightarrow$ Dichte bzw. Steigung/Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion an diesem Punkt $=$ instantanes Risiko des Scheiterns

Wie war das mit dem Grenzwert?

- Z. B. Dichtefunktion:
  - Im Intervall $[t = 10; t = 20]$ endet Prozentsatz (kumulative Verteilungsfunktion) $\rightarrow$ Risiko des Scheiterns in diesem Intervall
  - Wieviel scheitern exakt bei $t = 10$?
  - Intervall immer schmaler machen $[10;\ 11] \rightarrow [10; 10 + 10^{-10}] \rightarrow [10; 10 + 10^{-100}]$
  - Breite des Intervalls $\rightarrow 0$; Prozentsatz $\rightarrow$ Dichte bzw. Steigung/Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion an diesem Punkt = instantanes Risiko des Scheiterns
- Niedriges Risiko: man kann auch davor gescheitert sein
- Hazard: instantanes Risiko, geteilt durch Wahrscheinlichkeit, bis hierhin überlebt zu haben
- Höher, da für Ausgeschiedene kein Risiko mehr besteht

Was ist die inhaltliche Bedeutung der Hazard Rate?

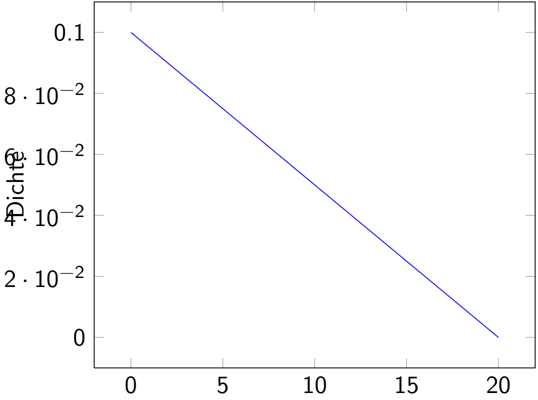
- Hazard – Risiko zu einem gegebenen *Zeitpunkt* (Grenzwert)
- Steht im Zentrum moderner Ereignisdatenanalyse
- Hat eine bestimmte Form
  - Kann über die Zeit konstant sein, steigen, fallen
  - Bei *konstantem* Hazard wird das Überleben über die Zeit immer unwahrscheinlicher
  - Fällt der Hazard auf null, ist das weitere Überleben zunächst gesichert, wenn man es bis hierhin geschafft hat
  - Menschliche Mortalität hat eine badewannenförmige Hazard-Funktion

Was ist die Bedeutung der kumulativen Hazard-Funktion?

- Beschreibt das Risiko, das im Lauf der Zeit akkumuliert wird („Umdrehungen“)
- Wie oft würde ein Objekt (im Mittel) „sterben“, wenn Scheitern wiederholbar?
- Äquivalent: Überlebenswahrscheinlichkeit, da $S(t) = \exp(-H(t))$
- Bzw. Wahrscheinlichkeit, *mindestens einmal* zu scheitern ($F(t) = 1 - S(t)$)

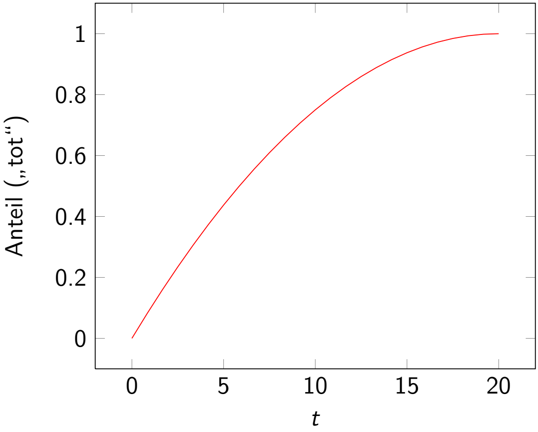
Ein konstruiertes Beispiel

- lineare Dichtefunktion
- $f(t) = 0.1 - 0.005 \times t$



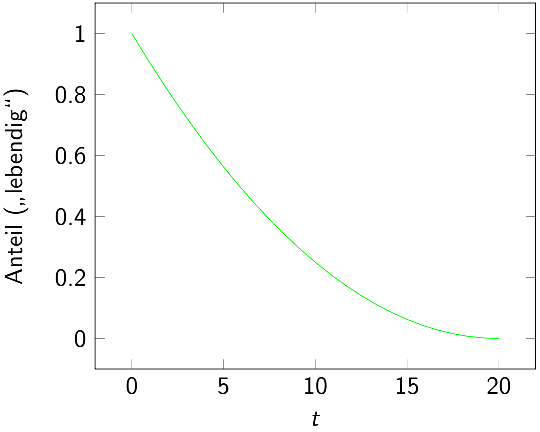
Kumulierte Verteilungsfunktion

- F(t) $= \int_0^t f(t)\, dt = 0.1 \times t - 0.0025 t^2$



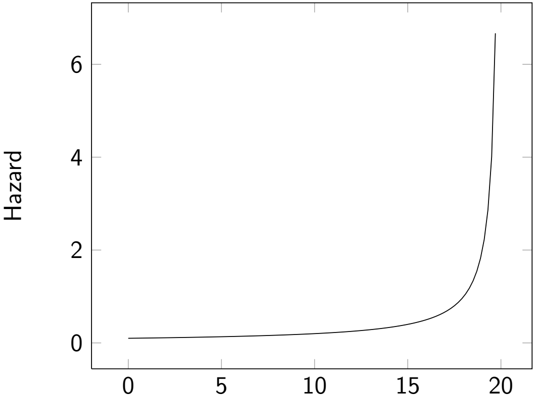
Survivor-Funktion

- 1-F(t)

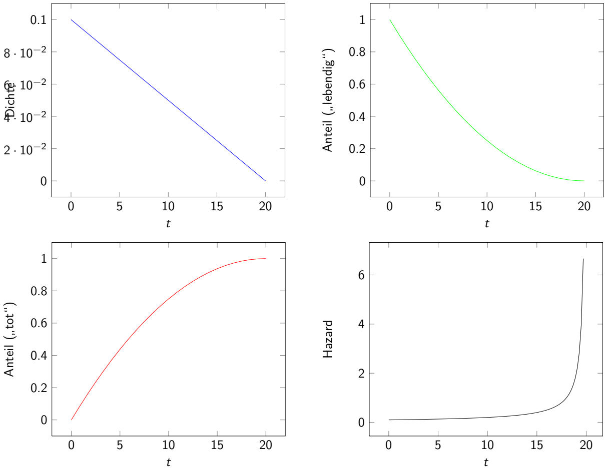


Hazard-Funktion

- $h(t)\frac{f(t)}{S(t)}$
- Ausfallrate, bezogen auf überlebende Objekte



Im Überblick



Survivor-, Dichte- und Hazard-Funktion

1. $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$
2. $f(t) = h(t) \times S(t)$
3. $S(t) = \frac{f(t)}{h(t)}$

- Moderne Anwendungen *parametrisieren* Modell in Hazard-Variante
- $h_j(t) = \text{somefunction}(h_0; \beta_0 + \mathbf{x}_j \boldsymbol{\beta}_x)$
- Fehler ϵ aus dem linearen Modell steckt in Dichtefunktion $\rightarrow$ wandert in Hazard-Funktion
- Wahl von „somefunction“ (=$g(\cdot)$ $\rightarrow$ Likelihood-Funktion
- Meistens *proportional*: $h_j(t) = h_0(t) \exp(\beta_0 +)x_j \boldsymbol{\beta}_x$

Diskrete vs. kontinuierliche Zeit

- Kann das Ereignis zu einer beliebigen Zeit auftreten?
- In politikwissenschaftlichen Anwendungen praktisch immer diskrete Zeiten (z. B. Tage)
- Survivor-Funktion in der Praxis mit „Treppen“
- Hazard-Rate leichter zu verstehen
- Verschiedene Anwendungen

Parametrische, semiparametrische, non-parametrische Modelle

- Parametrisch: Annahmen über Verteilungs-/Hazard-Funktion
  - „Baseline Hazard“ hat bestimmte Form
  - Form/Lage durch Kovariaten verändert
  - Effizienzgewinne
  - Bias, wenn Annahmen falsch
- Semi-parametrisch:
  - Keine Annahmen über baseline hazard h_0 (Hazard-Funktion)
  - Aber parametrische Wirkung der x-Variablen
  - Serie von binären Analysen
- Non-parametrisch: keine Annahmen

Was passiert mit zensierten Beobachtungen?

- Rechtszensierung relativ leicht handhabbar
- Schätzung der Parameter mittels Maximum Likelihood
- Likelihood eines Falles: Dichtefunktion
  - Für vollständig beobachtete Fälle keine Probleme
  - Rechtszensierte Fälle enthalten Information über das Überleben bis *zum Ende der Beobachtung* $\longrightarrow$ Survivor-Funktion
  - Für Rechtszensierte Fälle $\longrightarrow$ in Likelihood-Funktion einschließen

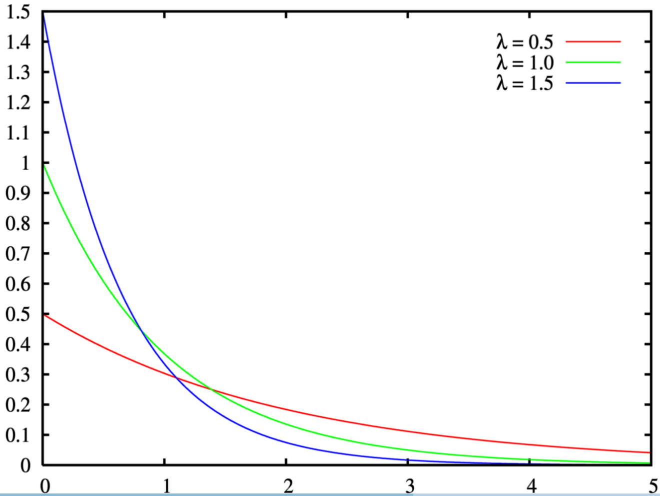
Wie funktioniert das Exponential-Modell?

- Parametrisierung via Hazard-Rate
- $h(t) = \exp(\beta_0 + \mathbf{X}\beta)$
- Hazard-Rate ist konstant (flache Linie), Kovariaten verschieben *Exponenten* und damit Niveau der Linie
- „Gedächtnisloser" Prozeß $\rightarrow$ exponentieller Zerfall bzw. Exponentialverteilung als Dichtefunktion (Parameter λ; $f(x;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$)

Wie funktioniert das Exponential-Modell?

- Parametrisierung via Hazard-Rate
- $h(t) = \exp(\beta_0 + \mathbf{X}\beta)$
- Hazard-Rate ist konstant (flache Linie), Kovariaten verschieben *Exponenten* und damit Niveau der Linie
- „Gedächtnisloser“ Prozeß → exponentieller Zerfall bzw. Exponentialverteilung als Dichtefunktion (Parameter λ; $f(x;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$)
- Einfach, aber für uns nicht realistisch

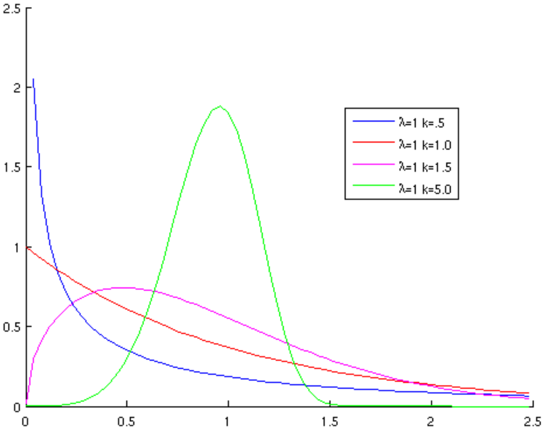
Exponentialverteilung mit verschiedenen λ



Weibull-Modell

- Eng mit Exponential-Modell verwandt ($\alpha = 1 \rightarrow$ Exponentialverteilung)
- Weibull-Verteilung
  - Flexibel
  - $k > 0 =$ „shape", $\lambda > 0 =$ „scale"
  - $f(x; \lambda; k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp(-(x/\lambda)^k)$
  - Entspricht konstanten, steigendem oder fallendem Hazard
- Parametrisierung: $h(t) = \exp(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \alpha \ln(t))$
- α legt die Form der Verteilung fest

Weibull: Mögliche Dichteverteilungen



Wie werden die Modelle parametrisiert?

- Verschiedene Programme, verschiedene Parametrisierungen
- Zwei Varianten:

1. Log-lineares Modell (Accelerated Failurte Time)
   - Logarithmus der Zeit bis failure als abhängige Variable
   - Linearer Prädiktor inkl. ϵ (nicht normalverteilt)
2. Proportional Hazard: Veränderung des instantanen Risikos

Was gibt es sonst noch?

- Statt Exponential- oder Weibull-Verteilungen auch andere Verteilungen möglich
- Flexibler (z. B. generalised Gamma) $\longrightarrow$ drei Parameter
- Parametrisch (Annahme über funktionale Form *und* Form der Hazard-Funktion)
- Aber . . .

Was gibt es sonst noch?

- Statt Exponential- oder Weibull-Verteilungen auch andere Verteilungen möglich
- Flexibler (z. B. generalised Gamma) $\longrightarrow$ drei Parameter
- Parametrisch (Annahme über funktionale Form *und* Form der Hazard-Funktion)
- Aber ...
  - Haben wir als Sozialwissenschaftler starke Annahmen über Form des Hazard?
  - Interessiert uns das überhaupt?

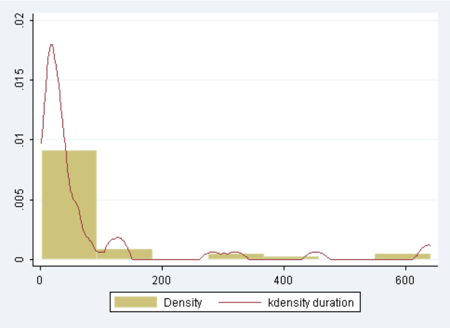
Wie sieht das Cox Proportional Hazard Model aus?

- $h(t) = h_0(t)\exp(\mathbf{X}\beta)$
- Baseline-Hazard: wird nicht-parametrisch aus den Daten geschätzt
- Proportional: Kovariaten haben multiplikativen Effekt auf Baseline-Hazard
- Basiert auf einem partiellen Likelihood-Verfahren
- Erweiterung ermöglicht Umgang mit variierenden Kovariaten

Mögliche Probleme mit dem Cox-Modell?

1. Unpräziser, vor allem bei kleinen Datensätzen
2. Ties problematisch (wenn häufig)
3. Nicht angemessen, wenn Form der Zeitabhängigkeit von Interesse
4. Schwächere Theorie

Dauer von 54 UN-Missionen 1948-2001



- $\bar{y} = 74$, Median 25.5, aber 15 noch nicht abgeschlossen (rechtszensiert)
- Korrigierte Schätzmethoden: Median 30 Monate, Mittelwert 228 Monate
- Drei Konflikttypen: civil war, insterstate conflict, internationalised civil war

Weibull: Hängt Dauer vom Konflikttyp ab?

```
Weibull regression -- log relative-hazard form

No. of subjects =           54                  Number of obs   =         54
No. of failures =           39
Time at risk    =         3994
                                                LR chi2(2)      =      17.67
Log likelihood  =   -84.655157                  Prob > chi2     =     0.0001

------------------------------------------------------------------------------
          _t |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       civil |   .8879245   .3832017     2.32   0.020      .1368629    1.638986
     interst |  -1.401441   .5117817    -2.74   0.006     -2.404515   -.3983673
       _cons |  -3.459909   .4952858    -6.99   0.000     -4.430652   -2.489167
-------------+----------------------------------------------------------------
       /ln_p |  -.2145617   .1237889    -1.73   0.083     -.4571834      .02806
-------------+----------------------------------------------------------------
           p |    .806895   .0998846                      .6330642    1.028457
         1/p |   1.239319   .1534138                        .97233    1.579619
```

Was bedeutet das?

- $p < 1$ Hazard reduziert sich mit der Zeit (Signifikanz?)
- Relative Hazard Parametrisierung
  - Für Referenzkategorie ist hazard $= \exp(-3.46) 0.8 t^{0.8-1} \exp(0)$
  - Für interstate conflict ist hazard $= \exp(-3.46) 0.8 t^{0.8-1} \exp(-1.4 \times 1)$
  - $\exp(-1.4) = 0.25$, d. h. hazard ist zu jedem Zeitpunkt 75% niedriger
  - Civil war: $\exp(0.89) = 2.44 \rightarrow$ hazard 144% höher
- Einsätze bei interstate conflict dauern am längsten, bei Bürgerkriegen am kürzesten (höheres Risiko des „Scheiterns“ $\rightarrow$ schnelleres Ende)

Weibull: Accelerated failure time

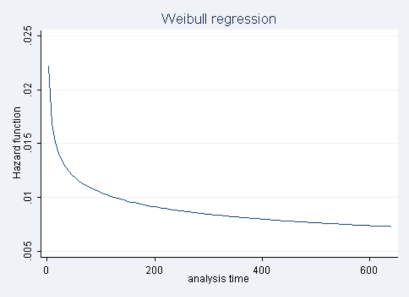
```
Weibull regression -- accelerated failure-time form

No. of subjects =           54                 Number of obs    =         54
No. of failures =           39
Time at risk    =         3994
                                               LR chi2(2)       =      17.67
Log likelihood  =   -84.655157                 Prob > chi2      =     0.0001

------------------------------------------------------------------------------
          _t |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       civil |  -1.100421   .4457861    -2.47   0.014    -1.974146   -.2266966
     interst |   1.736832   .6165459     2.82   0.005     .5284242     2.94524
       _cons |    4.28793   .2652436    16.17   0.000     3.768062    4.807798
-------------+----------------------------------------------------------------
       /ln_p |  -.2145617   .1237889    -1.73   0.083    -.4571834      .02806
-------------+----------------------------------------------------------------
           p |    .806895   .0998846                      .6330642    1.028457
         1/p |   1.239319   .1534138                        .97233    1.579619
```

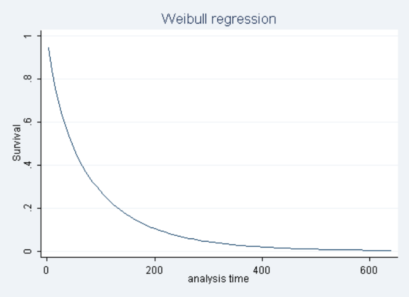
Was bedeutet das?

- Andere Parametrisierung,
- Identische Likelihood, identische Ergebnisse (weil $h(t) \leftrightarrows f(t)$)
- Umgekehrte Vorzeichen: niedrigerer hazard – längere Zeitdauer
- Civil war $<$ internationalised civil war $<$ interstate conflict

Geht das besser?

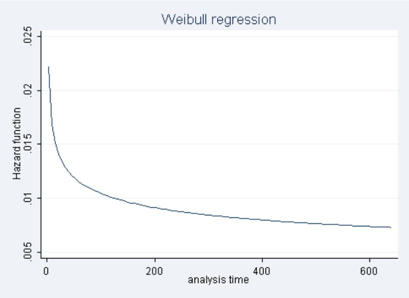
Geht das besser?

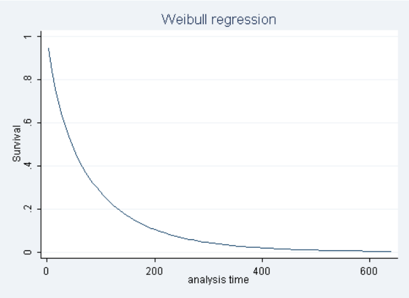




- Geschätzte hazard-/survival-Funktionen für internationalised civil war

Geht das besser?





- Geschätzte hazard-/survival-Funktionen für internationalised civil war
- Unter der Annahme, daß Zeiten mit geschätzten Parametern Weibull-verteilt sind

Welche Ergebnisse bringt das Cox model?

```
Cox regression -- Breslow method for ties

No. of subjects =           54                  Number of obs    =         54
No. of failures =           39
Time at risk    =         3994
                                                LR chi2(2)       =       8.93
Log likelihood  =   -127.15763                  Prob > chi2      =     0.0115

------------------------------------------------------------------------------
          _t |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       civil |   .7348046   .3781278     1.94   0.052    -.0063122    1.475921
     interst |  -.8556111   .5042314    -1.70   0.090    -1.843886    .1326643
```

Bzw.

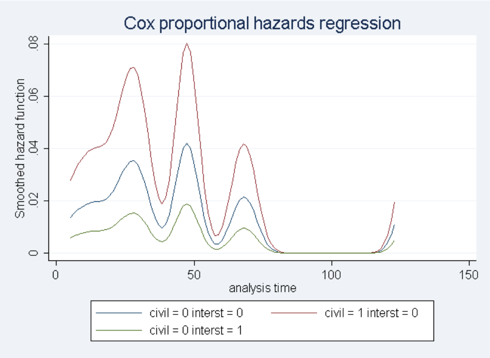
```
Cox regression -- Breslow method for ties

No. of subjects =           54                     Number of obs    =         54
No. of failures =           39
Time at risk    =         3994
                                                   LR chi2(2)       =       8.93
Log likelihood  =   -127.15763                     Prob > chi2      =     0.0115

------------------------------------------------------------------------------
          _t | Haz. Ratio   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       civil |   2.085075   .7884246     1.94   0.052     .9937077    4.375065
     interst |   .4250234   .2143101    -1.70   0.090     .1582014    1.141867
```

- exp(Koeffizient) = hazard ratio (Voreinstellung)

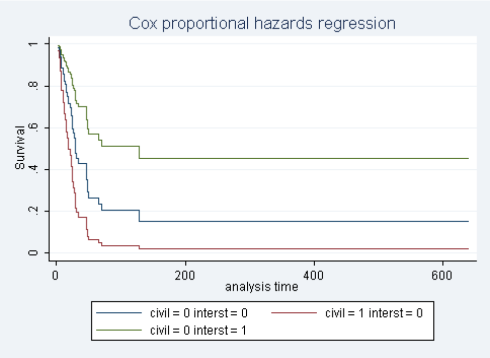
Was bedeutet das?

- Keine Konstante – keine Annahme über Form des base hazard
- Aber: Form des hazard für alle Fälle gleich!
- Hazard für civil war ca. zweimal größer als baseline hazard
- Hazard für interstate conflict weniger als halb so groß wie baseline hazard
- Identische Reihenfolge: civil war $<$ internationalised civil war $<$ interstate conflict

Geschätzte Hazard-Raten (geglättet)



Geschätzte Survivor-Funktionen



- Step-Funktionen
- Alle Missionen $>$ 128 Monate rechtszensiert

Zusammenfassung

- Vielzahl von Besonderheiten bei der Analyse von Ereignisdaten
- „Normale“ Modelle führen fast unweigerlich in die Irre
- Essentiell: Unterschiede und Beziehungen zwischen $f(t), S(t), h(t)$
- Vielzahl von Analysemöglichkeiten, dynamisches Feld

Übung für heute

- Datensatz `http:///www.kai-arzheimer.com/Lehre-Regression/unmissions.dta` in Stata laden
- Schätzen Sie für die UN-Daten noch einmal das Exponentialmodell in der Fehlerzeit-Parametrisierung: `streg civil interst ,dist(expon) time`

1. Wie interpretieren Sie die Vorzeichen der Koeffizienten?
2. Wie sehen die Hazard-Funktionen für die drei Konflikttypen aus? Kurzes Nachdenken genügt!
3. Mit `stcurve ,hazard at1(civil = 0 interst =0) at2(civil = 0 interst =1) at3(civil = 1 interst =0)` können Sie sehen, ob Sie richtig gedacht haben